

Векторлардың аралас көбейтіндісі және негізгі қасиеттері

Анықтама. Векторлардың аралас көбейтіндісі деп мына түрде берілген $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ санды айтамыз.

Қасиеттері: 1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

$$2) \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

3) Аралас көбейтіндінің геометриялық мағынасы, оның осы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары арқылы құрылған параллелепипедтің көлеміне тең болатындығында болып табылады.

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm V$, мұнда V — параллелепипедтің көлемі.

$+V, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — оң базис құрағанда, $-V, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — сол базис.

4) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарлы болған жағдайда, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ тең болады.

Егер $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2), \vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ өздерінің координаталарымен берілсе, онда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

№1. Берілген $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ векторлардың аралас көбейтіндісін табыңдар.

Шешуі. $\vec{a}(1; -1; 1), \vec{b}(1; 1; 1), \vec{c}(2; 3; 4)$

$$a) \vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 2 - 2 - 3 + 4 = 4 = +4 \text{ — оң базис құрайды.}$$

$$b) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = ?, \text{ есептеу реті, алдымен } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{k} + \vec{j} + \vec{k} - \vec{i} - \vec{j} =$$

$$= -2\vec{i} + 2\vec{k} \Rightarrow \vec{t}(-2; 0; 2), \text{ енді } \vec{t} \cdot \vec{c} = ?, \vec{t} \cdot \vec{c} = -4 + 0 + 8 = 4 = +4 \text{ — оң базис құрайды.}$$

№2. Мына түрдегі төбелерімен $A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3)$ және $D(3; 7; 2)$ берілген үшбұрышты пирамиданың көлемін есептеуіміз керек.

Шешуі. $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V_{\text{парал.}}, V_{\text{парал.}}$ — параллелепипед көлемі.

Пирамида қабырғаларымен сәйкес келетін, A нүктесінен шығатын $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{AD}$ векторларын табамыз.

$$\overrightarrow{AB} = \{(x_B - x_A), (y_B - y_A), (z_B - z_A)\} = \{(2 - 0), (3 - 0), (5 - 1)\} = \{2, 3, 4\},$$

$$\overrightarrow{AC} = (6, 2, 2), \quad \overrightarrow{AD} = (3, 7, 1).$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{парал.}} = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (4 + 18 + 168 - 24 - 28 - 18) = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20.$$

№3. λ —ның қандай мәнінде $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \lambda \vec{k}, \vec{b} = (0; 1; 0), \vec{c} = (3; 0; 1)$ векторлары компланар болады?

Шешуі: компланар болу үшін мына шарт орындалу керек $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. $\vec{a} = (1; 1; \lambda)$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 3\lambda - 0 - 0 = 1 - 3\lambda = 0, \quad 3\lambda = 1, \quad \lambda = \frac{1}{3} \quad \text{мәнінде } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ векторлары компланар болады.}$$

№4. Берілген векторлар $\vec{a} = (1; -2; 1), \vec{b} = (3; 2; 1), \vec{c} = (1; 0; -1)$ арқылы құрылған параллелепипедтің көлемін табыңдар.

$$\text{Шешуі: } \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 0 - 2 - 0 - 6 = -12 \quad \text{- сол үштік (солдық базис),}$$

$$|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = \pm V = -(-12) = 12.$$

№5. Берілген векторларды $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланардыкқа зерттейік. Егер $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, онда олар компланарлы.

Шешуі: $\vec{a} = (7; -3; 2), \vec{b} = (3; -7; 8), \vec{c} = (1; -1; 1)$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -49 - 6 - 24 + 14 + 56 + 9 = -79 + 79 = 0, \quad \text{демек векторлар компланарлы.}$$

№6. Екі вектордың ұзындықтарымен скаляр көбейтіндісі берілген. $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 2$,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. Есептеуіміз керек $|\vec{a} \times \vec{b}| = ?$

$$\text{Шешуі: } \vec{a} \cdot \vec{b} = 12 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = 10 \cdot 2 \cdot \cos\varphi; \quad 12 = 20 \cdot \cos\varphi, \quad \cos\varphi = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1; \quad \sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}; \quad \sin^2\varphi = \frac{16}{25};$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}; \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = 10 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} = 16.$$

Үйге тапсырма

1)Берілген векторлардың компланар екендіктерін тексеріңдер. а) $\vec{a} = (1; 2; -2)$,

$$\vec{b} = (1; -2; 1), \vec{c} = (5; -2; -1)$$

$$\text{б) } \vec{a} = \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{j} - \vec{k}, \vec{c} = \vec{i}$$

2) Төбелері $A(2; 2; 2)$, $B(4; 0; 3)$, $C(0; 1; 0)$ нүктелері болатын үшбұрыштың ауданын есепте.

3) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ және $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ векторлары берілген.

Табу керек: а) $\vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{b}) = ?$

$$\text{б) } |\vec{c}| = ?$$

4) Берілген векторлардың $\vec{a} = (1; 3; 1)$, $\vec{b} = (-2; 4; -1)$, $\vec{c} = (2; 4; -6)$

а)компланарлығын анықта, б) қандай үштікті(базис) құрайтындығын анықта, в) осы векторлар арқылы құрылған параллелепипедтің көлемін есепте.